УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ НОВОЙ НАЧАЛЬНО -КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА С РАЗРЫВОМ В ТИПЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ

©В. Н. Масленникова, М. Е. Боговский

1. Математическая модель динамики урагана над поверхностью суши. Математическая модель динамики океана, по поверхности которого перемещается ураган, рассмотрена нами в работе [1].

Динамику атмосферы при прохождении урагана над поверхностью суши отличает прежде всего наличие трения быстро вращающейся массы воздуха о твердую поверхность. Роль трения о твердую поверхность суши становится особенно заметной, когда ураган, пройдя тысячи километров по поверхности океана, как правило, быстро теряет силу, распадается и исчезает после выхода на поверхность суши. Во вращающейся с угловой скоростью $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ системе координат динамика атмосферы описывается системой Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v - [v, \omega] - \nu\Delta v + \frac{1}{\rho}\nabla p = f(x,t) \tag{1}$$
$$\operatorname{div} v = 0, \;\; x \in R^3_+ = \{x : x' = (x_1, x_2) \in R^2, x_3 > 0\}, \;\; t > 0,$$

где $[v, \omega]$ - векторное произведение (ускорение Кориолиса), в которое может быть включена также и сила Лоренца.

Начальные условия:

$$v(x,t)|_{t=0} = v^0(x), \;\; \operatorname{div} v^0(x) = 0, \;\; x \in R^3_+. \tag{2}$$

Граничная плоскость $x_3 = 0$, над которой перемещается ураган, распадается на два заданных подмножества $S_1(t)$ и $S_2(t)$, зависящих от времени так, что $S_1(t) \bigcup S_2(t) = R^2$ для всех $t \geq 0$. Граничащее с неподвижной воздушной средой подмножество $S_1(t)$ называется зоной покоя. Ураган локализован на подмножестве $S_2(t)$. В зоне покоя $S_1(t)$ краевое условие - это условие прилипания вязкой воздушной среды к поверхности суши:

$$v|_{x_3=0} = 0, \;\; x' \in S_1(t), \;\; t \geq 0. \tag{3}$$

На подмножестве $S_2(t)$ мы рассматриваем следующие условия Навье:

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_3} - Ev_j\right)|_{x_3=0} = 0, \;\; j = 1, 2, \tag{4}$$
$$v_3|_{x_3=0} = 0, \;\; x' \in S_2(t), \;\; t \geq 0,$$

где E-коэффициент внутреннего трения. Первые два условия в (4) означают пропорциональность с коэффициентом E касательного напряжения на границе $x_3 = 0$ вектору касательной скорости с компонентами v_1, v_2.

В общем случае коэффициент внешнего трения имеет вид $E(\rho, v)$, мы же рассмотрим на первом этапе $E = \text{const}$.

Для решения поставленной задачи мы вводим следующие функциональные пространства, зависящие от параметра t:

$$\overset{\circ}{K}{}_t^{\infty} = \{u(x) \in C^{\infty}(\overline{R^3_+}; R^3) : \operatorname{diam}\operatorname{supp}|u| < \infty,$$

$$\operatorname{div} u(x) = 0, \ \ u_j|_{x_3=0} = 0 \ \ \forall x' \in S_1(t), \ \ j = 1, 2,$$

$$u_3|_{x_3=0} = 0 \ \ \forall x' \in R^2\}.$$

Пусть $Q_T = R^3_+ \times (0, T]$. Норму в $W^{1,0}_{2,x,t}(Q_T; R^3)$ определим обычным образом:

$$\|v\|_{W^{1,0}_{2,x,t}(Q_T;R^3)} = \|v\|_{L_2(Q_T;R^3)} + \sum_{|\alpha|=1} \|D^{\alpha} v\|_{L_2(Q_T;R^3)}.$$

Обозначим через $\overset{\circ}{V}_{t,T}$ замыкание его пространства

$$\overset{\circ}{V}{}^{\infty}_{t,T} = \{v(x,t) \in C^{\infty}(\overline{Q}_T; R^3) : v(x,t) \in \overset{\circ}{K}{}_t^{\infty} \forall t \in [0,T]\}$$

в норме $W^{1,0}_{2,x,t}(Q_T; R^3)$; $\overset{\circ}{K}{}^1_t$ - есть замыкание его подпространства $\overset{\circ}{K}{}_t^{\infty}, t \in [0, T]$ в норме $W^1_2(R^3_+; R^3)$.

2. Гладкая эволюция урагана.

Определение 1. Векторное поле $v(x,t) \in \overset{\circ}{V}_{t,T}$ называется обобщенным решением задачи (1)-(4), если $v(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_t} [-(v, \Phi_t) - ([v, \omega], \Phi) - (v, (v, \nabla)\Phi) +$$

$$\nu \sum_{j=1}^{3} (\nabla v_j, \nabla \Phi_j)] dx dt + E\nu \sum_{j=1}^{2} \int_0^T \int_{S_2(t)} v_j(x', 0, t) \times$$

$$\times \Phi_j(x', 0, t) dx' dt = \int_{Q_T} (f, \Phi) dx dt + \int_{R^3_+} (v^{\circ}(x), \Phi(x, 0) dx$$

для любой функции $\Phi(x,t) \in \overset{\circ}{V}{}^{\infty}_{t,T}$, такой, что $\Phi|_{t=T} = 0$. Предполагается заданным зависящий от параметра $t \in [0, T]$ диффеоморфизм $A^t : R^2 \to R^2$, бесконечно дифференцируемый по x', t и такой, что

$$S_2(t) = A^t(S_2(0)), \ \ A^t|_{t=0} = I \tag{5}$$

в любой момент времени $t \in [0, T]$, где I - единичная матрица. Из (5) следует, что

$$S_1(t) = A^t(S_1(0)) \ \ \forall t \in [0, T]$$

Теорема 1. *Пусть $S_2(0) \in R^2$ измеримое по Лебегу подмножество, $T > 0, \nu > 0, E > 0, v^{\circ}(x) \in \overset{\circ}{J}_2(R^3_+), f(x,t) \in L_2(Q_T; R^3)$ и A^t удовлетворяет условию (5). Тогда существует обобщенное решение $v(x,t)$ задачи (1)-(4).*

Теорема 1 доказывается методом Галеркина с помощью следующей леммы.

Лемма. Существует полная линейно независимая в $\overset{\circ}{K}{}_t^{\infty}$ система векторных полей

$$\{u_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}, \ \ u_k(x,t) \in \overset{\circ}{V}{}^{\infty}_{t,T}.$$

Эта система ортонормирована в

$$L_2(R^3_+; R^3) \forall t \in [0,T].$$

Доказательство. Определим диффеоморфизм $a^t : R^3_+ \to R^3_+$ следующим образом:

$$\begin{aligned} y' &= A^t(x'), \quad x' \in R^2, \\ y_3 &= x_3, \quad x_3 > 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $t \in [0,T]$ считается параметром. Через J_t обозначим матрицу Якоби отображения (6). В силу (5) имеем $J_t|_{t=0} = I$. Поскольку $\overset{\circ}{K}{}^1_0$ - сепарабельное гильбертово пространство, являющееся по определению замыканием в $W^1_2(R^3_+; R^3)$ его подпространства $\overset{\circ}{K}{}^\infty_0$, то в нем существует счетное всюду плотное подмножество, состоящее из элементов $\overset{\circ}{K}{}^\infty_0$. Выбирая среди этих элементов только линейно независимые, получим полную линейно независимую систему $\{W^k(x)\}_{k=1}^\infty$ в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{K}{}^1_0$ с нормой $W^1_2(R^3_+; R^3)$, состоящую из элементов $W^k(x) \in \overset{\circ}{K}{}^\infty_0$.

Систему векторных полей $\{\tilde{u}^k(x,t)\}_{k=1}^\infty$ определим равенствами

$$\tilde{u}^k(x,t) = \frac{J_k^{-1} w^k(y(x,t))}{|\det J_t^{-1}|}, \quad k \geq 1, \tag{7}$$

где вектор-функция $y(x,t)$ берется из (6). Поскольку $\operatorname{div}_x W^k(x) = 0$, то, как не трудно убедиться,

$$\operatorname{div}_x \tilde{u}^k(x,t) = 0, \quad x \in R^3_+, \quad t \in [0,T], \quad k \geq 1.$$

Поэтому векторные поля $\tilde{u}^k(x,t) \in \overset{\circ}{V}{}^\infty_{t,T}$, $k \geq 1$.

Полагая по определению

$$u^1(x,t) = \frac{\tilde{u}^1(x,t)}{\|\tilde{u}^1(x,t)\|_{L_2(R^3_+; R^3)}}, \quad x \in R^3_+, \quad t \in [0,T],$$

получаем первый элемент искомой системы. При этом

$$\|\tilde{u}^1(x,t)\|^2_{L_2(R^3_+; R^3)} = \int_{R^3_+} \frac{|J_t^{-1} w^1(z)|^2}{|\det J_t^{-1}|} dz \neq 0 \ \forall t \in [0,T],$$

так как, если хотя бы для одного значения $t \in [0,T]$ последний интеграл равнялся нулю, то мы бы имели $w^1(z) = 0 \ \forall z \in R^3_+$, что противоречит ранее сделанному выбору $w^1(x)$. Иными словами, равенство нулю нормы

$$\|\tilde{u}^1(x,t)\|_{L_2(R^3_+; R^3)} = 0$$

для какого-либо значения $t \in [0,T]$ означает, что $w^1(z) = 0 \ \forall z \in R^3_+$, что невозможно.

Далее следуя обычной схеме метода ортогонализации Шмидта, полагаем

$$U^2(x,t) = \tilde{u}^2(x,t) - u^1(x,t) \int_{R^3_+} (\tilde{u}^2(x,t), u^1(t,x)) dx$$

для всех значений параметра $t \in [0,T]$. Обозначив

$$\phi(t) = \frac{1}{\|\tilde{u}^1(x,t)\|^2_{L_2(R^3_+;R^3)}} \int_{R^3_+} (\tilde{u}^2(x,t), \tilde{u}^1(x,t))dx,$$

получаем

$$U^2(x,t) = \tilde{u}^2(x,t) - \phi(t)\tilde{u}^1(x,t), \quad x \in R^3_+,$$

где $t \in [0,T]$ -параметр. При этом имеем

$$\|U^2(x,t)\|^2_{L_2(R^3_+;R^3)} =$$
$$= \int_{R^3_+} |J_t^{-1}(w^2(z) - \phi(t)w^1(z))|^2 \frac{dz}{|\det J_t^{-1}|} \neq 0 \ \forall t \in [0,T],$$

так как, если хотя бы для одного значения $t \in [0,T]$ последний интеграл равнялся нулю, то мы бы имели $w^2(z) = \phi(t)w^1(z)$, что невозможно, ввиду линейной независимости $w^1(z)$ и $w^2(z)$.

Полагая теперь

$$u^2(x,t) = \frac{U^2(x,t)}{\|u^2(x,t)\|_{L_2(R^3_+;R^3)}}, \quad x \in R^3_+, \ t \in [0,T]$$

получаем второй элемент искомой системы. Продолжая процесс, по индукции получаем систему $\{u^k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ с требуемыми свойствами.

Лемма доказана.

При доказательстве теоремы 1 Галеркинские приближения определяются равенством

$$v^N(x,t) = \sum_{j=1}^{N} c_j^N(t)u^j(x,t), \quad N \geq 1,$$

где в отличие от традиционного метода Галеркина базисные функции $u^j(x,t)$ зависят как от x, так и от t. Неизвестные коэффициенты $c_j^N(t)$ есть решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$c_i^N(0) = a^i, \quad 1 \leq i \leq N,$$

где $\{a^i\}_{i=1}^{\infty}$ являются коэффициентами Фурье в $L_2(R^3_+;R^3)$ векторного поля $v^0(x)$ относительно ортогонального базиса

$$\{u^i(x,0)\}_{i=1}^{\infty}.$$

3. Негладкая эволюция урагана. Предположим теперь, что $S_1(t)$ и $S_2(t)$ измеримы по Лебегу и трехмерное подмножество $\{x',t : x' \in S_2(t),\ 0 < t < T\}$ открыто в R^3, а эволюция A^t произвольна.

В этом случае сначала мы рассматриваем линеаризованную систему Навье-Стокса

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t} - [v,\omega] - \nu\Delta v + \frac{1}{\rho}\nabla p = f(x,t) \\ \operatorname{div} v = 0, \ x \in R^3_+, \ t > 0\end{gathered} \tag{8}$$

с начальным условием

$$v|_{t=0} = v^0(x), \ x \in R^3_+, \ v^0(x) \in W_2^1(R^3_+;R^3), \operatorname{div} v^0 = 0,$$

при этом, мы вынуждены свести начальное условие к нулевому заменой

$$u(x,t) = v(x,t) - v^0(x).$$

В результате такой замены получаем систему

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - [u,\omega] - \nu\Delta u + \frac{1}{\rho}\nabla\rho = F(x,t) \\ \operatorname{div} u = 0,\ x \in R^3_+,\ t \in (t,T),\end{gathered} \tag{9}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = 0,\ x \in R^3_+, \tag{10}$$

где $F(x,t) = f(x,t) + [v^\circ(x),\omega] + \nu\Delta v^\circ(x)$ - функционал.

Граничные условия для $u(x,t)$ имеют вид (3) и(4).

Пространства $\overset{\circ}{K}{}_t^\infty, \overset{\circ}{V}{}_{t,T}^\infty, \overset{\circ}{V}_{t,T}$, в которых рассматривается решение, те же, что и в §2. Кроме них мы введем пространство $\overset{\circ}{H}_{t,T}$ как замыкание $\overset{\circ}{V}{}_{t,T}^\infty$ в неизотропной весовой норме Соболева

$$\|v\|_{\overset{\circ}{H}_{t,T}} = \|v\|_{L_2(Q_T;R^3)} + \sum_{|\alpha|=1} \|\sqrt{T-t}D_x^\alpha v\|_{L_2(Q_T;R^3)}.$$

Поскольку норма $\overset{\circ}{H}_{t,T}$ не содержит производной по t, то замыкание в $\overset{\circ}{H}_{t,T}$ подпространства $\overset{\circ}{V}{}_{t,T}^\infty$ совпадает с замыканием в $\overset{\circ}{H}_{t,T}$ подпространства

$$\overset{\circ}{H}{}_{t,T}^\infty = \{v(x,t) \in \overset{\circ}{V}{}_{t,T}^\infty : \exists\epsilon(v) > 0 : v(x,t) = 0 \forall t \geq T - \epsilon(v)\}$$

Мы вводим два определения обобщенного решения.

Определение 1 совпадает с соответствующим определением 1 обобщенного решения для задачи (1)-(4) без конвективного члена и с заменой правой части интегрального тождества на функционал

$$\Lambda\Phi = \int_{Q_T} (f,\Phi)dxdt + \int_{Q_T} ([v^\circ,\omega],\Phi)dxdt - \nu\sum_{j=1}^{3}\int_{Q_T}(\nabla v_j^\circ, \nabla\Phi_j)dxdt -$$
$$-E\nu\sum_{j=1}^{2}\int_0^T\int_{S_2(t)} v_j^\circ(x',0)\Phi_j(x',0,t)dx'dt.$$

Однако мы вынуждены ввести другое определение обобщенного решения задачи (9),(10),(3),(4), эквивалентное первому, существование которого и доказывается.

Определение 2. Векторное поле $u(x,t) \in \overset{\circ}{H}_{t,T}$ назовем обобщенным решением задачи (9),(10),(3),(4), если $u(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_T}(u,w)dxdt + \int_{Q_T}\Big[-(u,w_t) - ([u,\omega],w) + \nu\sum_{j=1}^{3}(\nabla u_j,\nabla w_j)\Big](T-t)dxdt +$$
$$+E\nu\sum_{j=1}^{2}\int_0^T\int_{S_2(t)} u_j(x',0,t)w_j(x',0,t)(T-t)dx'dt = \Lambda_T(w)$$

для любой пробной функции $w(x,t) \in \overset{\circ}{V}{}^{\infty}_{t,T}$, где линейный функционал

$$\Lambda_T = \int_{Q_T} \left[(f,w) + ([v^\circ,\omega],w) - \nu \sum_{j=1}^{3} (\nabla v_j^\circ, \nabla w_j)(T-t)dxdt\right] -$$

$$-E\nu \sum_{j=1}^{2} \int_0^T \int_{S_2(t)} v_j^\circ(x',0) w_j(x',0,t)(T-t)dx'dt.$$

Лемма. Определения (1) и (2) эквивалентны на пересечении

$$\overset{\circ}{V}_{t,T} \bigcap \overset{\circ}{H}_{t,T} = \overset{\circ}{V}_{t,T}$$

Взяв в определении 1 пробные функции в виде $\Phi(x,t) = (T-t)w(x,t)$, где $w(x,t) \in \overset{\circ}{V}{}^{\infty}_{t,T}$ получаем определение 2. Для доказательства того, что из определения 2 следует определение 1, достаточно доказать, что любую пробную функцию $\Phi(x,t) \in \overset{\circ}{V}{}^{\infty}_{t,T}$ можно аппроксимировать в норме

$$\|\Phi\| \equiv \|\Phi\|_{L_2(Q_T;R^3)} + \sum_{|\alpha|=1} \|(T-t)D_x^\alpha \Phi(x,t)\|_{L_2(Q_T;R^3)} +$$

$$+\|(T-t)\Phi'_t\|_{L_2(Q_T;R^3)}$$

вектор-функциями из $\overset{\circ}{H}{}^{\infty}_{t,T}$, что мы и делаем.

Теорема 2. *Пусть* $T>0$, $\nu>0$, $v^\circ(x) \in W_2^1(R_+^3;R^3)$, $f(x,t) \in L_2(Q_T;R^3)$. *Тогда существует обобщенное решение задачи (9), (10), (3), (4) в смысле определения 2.*

Теорема доказывается с помощью модифицированного метода Галеркина.

По определению подпространство $\overset{\circ}{V}{}^{\infty}_{t,T}$ всюду плотно в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{H}{}^{\infty}_{t,T}$. Ввиду сепарабельности $\overset{\circ}{H}_{t,T}$ существует счетное всюду плотное подмножество в $\overset{\circ}{H}_{t,T}$, состоящее из элементов $\overset{\circ}{V}{}^{\infty}_{t,T}$.

Выбирая среди этих элементов только линейно независимые, получим полную линейно независимую систему $\{u^j(x,t)\}_{j=1}^{\infty}$ в Гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{H}_{t,T}$, состоящую из элементов $u^j(x,t) \in \overset{\circ}{V}{}^{\infty}_{t,T}$, $j \geq 1$. Эта система используется как базис в модифицированном методе Галеркина. Галеркинские приближения определим равенством

$$U^N(x,t) = \sum_{j=1}^{N} C_j^N u^j(x,t), \ N \geq 1,$$

где C_j^N -числа, а не функции, как в §2.

Для определения коэффициентов C_j^N получаем алгебраическую систему

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}^N C_j^N = \Lambda_T(u^i), \ 1 \geq i \geq N,$$

при этом детерминант матрицы $\{\alpha_{ij}^N\}_{i,j=1}^N$ не является определителем Грама, однако, доказывается, что он отличен от нуля.

Из полученной оценки

$$\|U^N\|_{\overset{\circ}{H}_{t,T}} \leq c(\nu, T, E, |\omega|)[\|f\|_{L_2(Q_T;R^3)} + \|v^\circ\|_{W_2^1}(R^3_+;R^3)]$$

следует слабая сходимость галеркинских приближений. Для решения задачи для нелинейной системы Навье-Стокса можно применить итерационный метод

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} + (v^n, \nabla)v^{n+1} + [\omega, v^{n+1}] - \nu\Delta v^{n+1} + \frac{1}{\rho}\nabla P^{n+1} = f(x,t)$$

и доказать его слабую сходимость в пространстве

$$W^{1,\frac{1}{4}}_{2,x,t}(Q_T;R^3).$$

1. *Боговский М.Е., Масленникова В.Н., Уэрдиан Ж.А.* , Об одной краевой задаче с разрывными краевыми условиями в динамике океана под влиянием урагана // ДАН СССР. - 1991. - **318**, - *N 5*. - С. 1037-1041.